

**Федеральное государственное автономное образовательное  
учреждение высшего образования  
«Московский физико-технический институт  
(национальный исследовательский университет)»**

**УТВЕРЖДЕНО**

**Директор физтех-школы  
прикладной математики и  
информатики**

**А.М. Райгородский**

	<b>Рабочая программа дисциплины (модуля)</b>
<b>по дисциплине:</b>	Диофантовы уравнения. Дополнительные главы
<b>по направлению:</b>	Прикладная математика и информатика
<b>профиль подготовки:</b>	Математика
	Физтех-школа Прикладной Математики и Информатики
	кафедра дискретной математики
<b>курс:</b>	3
<b>квалификация:</b>	бакалавр

Семестр, формы промежуточной аттестации: 6 (весенний) - Дифференцированный зачет

Аудиторных часов: 60 всего, в том числе:

лекции: 30 час.

семинары: 30 час.

лабораторные занятия: 0 час.

Самостоятельная работа: 75 час.

Всего часов: 135, всего зач. ед.: 3

Программу составил: Б. Мороз, д-р физ.-мат. наук

Программа обсуждена на заседании кафедры дискретной математики 13.06.2023

## Аннотация

Диофантовы приближения — раздел теории чисел, изучающий приближения действительных чисел рациональными числами, а в более широком смысле, вопросы, связанные с решением в целых числах линейных и нелинейных неравенств или систем неравенств с действительными коэффициентами. Диофантовы приближения названы в честь древнегреческого математика Диофанта, который занимался задачей решения алгебраических уравнений в целых числах — диофантовых уравнений. Методы теории диофантовых приближений основаны на применении непрерывных дробей, рядов Фарея, принципа Дирихле. Этому и посвящен данный курс.

### 1. Цели и задачи

#### Цель дисциплины

Доказать классическую теорему Ю.В. Матиясевича о диофантовости перечислимых множеств.

#### Задачи дисциплины

- познакомить студентов с понятием диофантового приближения;
- изучить основные понятия: Теорему Минковского, Теоремы Лежандра и Фату, Теорема Гурвица о диофантовых приближениях и др.;
- изучить неравенства для диофантовых экспонент.

### 2. Перечень формируемых компетенций

Освоение дисциплины направлено на формирование следующих компетенций:

Код и наименование компетенции	Индикаторы достижения компетенции
УК-1 Способен осуществлять поиск, критический анализ и синтез информации, применять системный подход для решения поставленных задач	УК-1.1 Анализирует задачу, выделяя этапы ее решения, действия по решению задачи
	УК-1.3 Рассматривает различные варианты решения задачи, оценивает их преимущества и недостатки
	УК-1.2 Находит, критически анализирует и выбирает информацию, необходимую для решения поставленной задачи
	УК-1.4 Грамотно, логично, аргументированно формирует собственные суждения и оценки
	УК-1.5 Определяет и оценивает практические последствия возможных вариантов решения задачи
ОПК-1 Способен применять фундаментальные знания, полученные в области физико-математических и (или) естественных наук и использовать их в профессиональной деятельности	ОПК-1.1 Способен анализировать поставленную задачу, намечать пути ее решения
	ОПК-1.2 Способен строить математические модели, производить количественные расчеты и оценки
	ОПК-1.3 Способен определять границы применимости полученных результатов
ОПК-2 Способен использовать современные информационные технологии и программные средства при решении задач профессиональной деятельности, соблюдая требования информационной безопасности	ОПК-2.1 Способен применять современные вычислительную технику и сервисы сети Интернет в области (сфере) профессиональной деятельности
	ОПК-2.2 Знает и умеет применять численные математические методы и прикладное программное обеспечение для решения научных задач в профессиональной области
	ОПК-2.3 Знает основные требования информационной безопасности
ОПК-3 Способен составлять и оформлять научные и (или) технические (технологические, инновационные) отчеты	ОПК-3.1 Знает основные правила оформления научных публикаций и научно-технической документации, в том числе с использованием прикладного программного обеспечения
	ОПК-3.2 Владеет на практике методологией составления научно-технических отчетов (проектов)

(публикации, проекты)	ОПК-3.3 Владеет методами визуального и графического представления результатов научной (научно-технической, инновационной технологической) деятельности в виде отчетов, научных публикаций
ПК-1 Способен ставить, формализовывать и решать задачи, в том числе разрабатывать и исследовать математические модели изучаемых явлений и процессов, системно анализировать научные проблемы, получать новые научные результаты	ПК-1.1 Способен находить, анализировать и обобщать информацию об актуальных результатах исследований в рамках тематической области своей профессиональной деятельности
	ПК-1.2 Способен выдвигать гипотезы, строить математические модели для описания изучаемых явлений и процессов, оценивать качество разработанной модели
	ПК-1.3 Способен применять теоретические и (или) экспериментальные методы исследований к конкретной научной задаче и интерпретировать полученные результаты
ПК-2 Способен самостоятельно или в качестве члена (руководителя) малого коллектива организовывать и проводить научные исследования и их апробацию	ПК-2.1 Знает принципы построения научной работы, методы сбора и анализа полученного материала, способы аргументации
	ПК-2.2 Способен планировать и проводить научные исследования самостоятельно или в качестве члена (руководителя) малого научного коллектива
	ПК-2.3 Способен проводить апробацию результатов научно-исследовательской работы посредством публикации научных статей и участия в конференциях

### 3. Перечень планируемых результатов обучения по дисциплине (модулю)

В результате освоения дисциплины обучающиеся должны

знать:

- основные понятия диофантовых приближений;
- основные приближения;
- порядок приближения числа его подходящей дробью, представление натурального, функции меры иррациональности.

уметь:

- уметь доказывать (вместе со всеми деталями) рассказанные теоремы и ориентироваться в них.

владеть:

- навыками самостоятельной работы;
- навыками освоения большого объема информации;
- методами диофантовых приближений;

### 4. Содержание дисциплины (модуля), структурированное по темам (разделам) с указанием отведенного на них количества академических часов и видов учебных занятий

#### 4.1. Разделы дисциплины (модуля) и трудоемкости по видам учебных занятий

№	Тема (раздел) дисциплины	Трудоемкость по видам учебных занятий, включая самостоятельную работу, час.			
		Лекции	Семинары	Лаборат. работы	Самост. работа
1	Внутренние приближения	5	5		12
2	Функция меры иррациональности (одномерный случай)	5	5		15
3	Теоремы Лежандра и Фату.	5	5		15
4	Уравнения Пелля	5	5		12

5	Счётность множества всех диофантовых множеств	5	5		11
6	Уравнения Пелля и числа Фибоначчи	5	5		10
Итого часов		30	30		75
Подготовка к экзамену		0 час.			
Общая трудоёмкость		135 час., 3 зач.ед.			

#### 4.2. Содержание дисциплины (модуля), структурированное по темам (разделам)

Семестр: 6 (Весенний)

##### 1. Внутренние приближения

Внутренние приближения на единичной окружности на плоскости. Внутренние приближения на единичной сфере в  $\mathbb{R}^3$ . Теорема Клейнбока-Меррилла.

##### 2. Функция меры иррациональности (одномерный случай)

Подходящие дроби и наилучшие приближения.

##### 3. Теоремы Лежандра и Фату.

Спектры Лагранжа и Дирихле и их максимальные и минимальные точки. Функция меры иррациональности (многомерный случай). Наилучшие совместные приближения и их простейшие свойства. Подпространства наилучших приближений. Неравенства для диофантовых экспонент.

##### 4. Уравнения Пелля

Диофантовость некоторых арифметических функций. Ограниченные кванторы всеобщности. Универсальные полиномы. Диофантовость и перечислимость (десятая проблема Гильберта).

##### 5. Счётность множества всех диофантовых множеств

Доказать счётность множества всех диофантовых множеств. Доказать диофантовость некоторых определённых в лекциях предикатов и функций. Доказать диофантовость пустого множества.

##### 6. Уравнения Пелля и числа Фибоначчи

Сформулировать гипотезу Yu. Robinson и описать роль этой гипотезы в решении 10 - ой проблемы Гильберта. Дать определение универсального полинома. Сформулировать тезис Чёрча. Привести несколько примеров неразрешимых диофантовых множеств.

#### 5. Описание материально-технической базы, необходимой для осуществления образовательного процесса по дисциплине (модулю)

Стандартная учебная аудитория.

#### 6.Перечень рекомендуемой литературы

##### Основная литература

1. Классические диофантовы уравнения от двух неизвестных [Текст]/В. Г. Спринджук, -М., Наука, 1982

Дополнительная литература

1. Линейная алгебра [Текст] : учебник для вузов / В. А. Ильин, Э. Г. Позняк .— 3 - е изд., доп. — М. : Наука, 1984 .— 295 с.

**7. Перечень ресурсов информационно-телекоммуникационной сети "Интернет", необходимых для освоения дисциплины (модуля)**

<http://dm.fizteh.ru/>

**8. Перечень информационных технологий, используемых при осуществлении образовательного процесса по дисциплине (модулю), включая перечень необходимого программного обеспечения и информационных справочных систем (при необходимости)**

Не предусмотрено.

**9. Методические указания для обучающихся по освоению дисциплины (модуля)**

Рекомендуется успешно сдавать контрольные работы, так как это упрощает итоговую аттестацию по предмету.

Для подготовки к итоговой аттестации по предмету лучше всего пользоваться материалами лекций.

## ПРИЛОЖЕНИЕ

### ОЦЕНОЧНЫЕ МАТЕРИАЛЫ ПО ДИСЦИПЛИНЕ (МОДУЛЮ)

**по направлению:** Прикладная математика и информатика  
**профиль подготовки:** Математика  
Физтех-школа Прикладной Математики и Информатики  
кафедра дискретной математики  
**курс:** 3  
**квалификация:** бакалавр

Семестр, формы промежуточной аттестации: 6 (весенний) - Дифференцированный зачет

**Разработчик:** Б. Мороз, д-р физ.-мат. наук

## 1. Компетенции, формируемые в процессе изучения дисциплины

Код и наименование компетенции	Индикаторы достижения компетенции
УК-1 Способен осуществлять поиск, критический анализ и синтез информации, применять системный подход для решения поставленных задач	УК-1.1 Анализирует задачу, выделяя этапы ее решения, действия по решению задачи
	УК-1.3 Рассматривает различные варианты решения задачи, оценивает их преимущества и недостатки
	УК-1.2 Находит, критически анализирует и выбирает информацию, необходимую для решения поставленной задачи
	УК-1.4 Грамотно, логично, аргументированно формирует собственные суждения и оценки
	УК-1.5 Определяет и оценивает практические последствия возможных вариантов решения задачи
ОПК-1 Способен применять фундаментальные знания, полученные в области физико-математических и (или) естественных наук и использовать их в профессиональной деятельности	ОПК-1.1 Способен анализировать поставленную задачу, намечать пути ее решения
	ОПК-1.2 Способен строить математические модели, производить количественные расчеты и оценки
	ОПК-1.3 Способен определять границы применимости полученных результатов
ОПК-2 Способен использовать современные информационные технологии и программные средства при решении задач профессиональной деятельности, соблюдая требования информационной безопасности	ОПК-2.1 Способен применять современные вычислительную технику и сервисы сети Интернет в области (сфере) профессиональной деятельности
	ОПК-2.2 Знает и умеет применять численные математические методы и прикладное программное обеспечение для решения научных задач в профессиональной области
	ОПК-2.3 Знает основные требования информационной безопасности
ОПК-3 Способен составлять и оформлять научные и (или) технические (технологические, инновационные) отчеты (публикации, проекты)	ОПК-3.1 Знает основные правила оформления научных публикаций и научно-технической документации, в том числе с использованием прикладного программного обеспечения
	ОПК-3.2 Владеет на практике методологией составления научно-технических отчетов (проектов)
	ОПК-3.3 Владеет методами визуального и графического представления результатов научной (научно-технической, инновационной технологической) деятельности в виде отчетов, научных публикаций
ПК-1 Способен ставить, формализовывать и решать задачи, в том числе разрабатывать и исследовать математические модели изучаемых явлений и процессов, системно анализировать научные проблемы, получать новые научные результаты	ПК-1.1 Способен находить, анализировать и обобщать информацию об актуальных результатах исследований в рамках тематической области своей профессиональной деятельности
	ПК-1.2 Способен выдвигать гипотезы, строить математические модели для описания изучаемых явлений и процессов, оценивать качество разработанной модели
	ПК-1.3 Способен применять теоретические и (или) экспериментальные методы исследований к конкретной научной задаче и интерпретировать полученные результаты
ПК-2 Способен самостоятельно или в качестве члена (руководителя) малого коллектива организовывать и проводить научные исследования и их апробацию	ПК-2.1 Знает принципы построения научной работы, методы сбора и анализа полученного материала, способы аргументации
	ПК-2.2 Способен планировать и проводить научные исследования самостоятельно или в качестве члена (руководителя) малого научного коллектива

## 2. Показатели оценивания компетенций

В результате изучения дисциплины «Диофантовы уравнения. Дополнительные главы» обучающийся должен:

### знать:

- основные понятия диофантовых приближений;
- основные приближения;
- порядок приближения числа его подходящей дробью, представление натурального, функции меры иррациональности.

### уметь:

- уметь доказывать (вместе со всеми деталями) рассказанные теоремы и ориентироваться в них.

### владеть:

- навыками самостоятельной работы;
- навыками освоения большого объема информации;
- методами диофантовых приближений;

## 3. Перечень типовых (примерных) вопросов, заданий, тем для подготовки к текущему контролю

С целью контроля освоения обучающимися учебного материала проводится устный опрос в начале занятия по теме прошлого занятия.

## 4. Перечень типовых (примерных) вопросов и тем для проведения промежуточной аттестации обучающихся

Список заданий и вопросов к дифференцированному зачету приведен в отдельном файле.

### Критерии оценивания

- оценка «отлично (10)» выставляется студенту, показавшему всесторонние, систематизированные, глубокие знания учебной программы дисциплины и умение уверенно применять их на практике при решении конкретных задач, свободное и правильное обоснование принятых решений;
- оценка «отлично (9)» выставляется студенту, показавшему всесторонние, систематизированные, глубокие знания учебной программы дисциплины и умение применять их на практике при решении конкретных задач, свободное и правильное обоснование принятых решений;
- оценка «отлично (8)» выставляется студенту, показавшему всесторонние систематизированные, глубокие знания учебной программы дисциплины и умение применять их на практике при решении конкретных задач, и правильное обоснование принятых решений;
- оценка «хорошо (7)» выставляется студенту, если он твердо знает материал, грамотно и по существу излагает его, умеет применять полученные знания на практике, но допускает в ответе или в решении задач некоторые неточности;
- оценка «хорошо (6)» выставляется студенту, если он знает материал, грамотно и по существу излагает его, умеет применять полученные знания на практике, но допускает в ответе или в решении задач некоторые неточности;
- оценка «хорошо (5)» выставляется студенту, если он знает материал, и по существу излагает его, умеет применять полученные знания на практике, но допускает в ответе или в решении задач некоторые неточности;
- оценка «удовлетворительно (4)» выставляется студенту, показавшему фрагментарный, разрозненный характер знаний, недостаточно правильные формулировки базовых понятий, нарушения логической последовательности в изложении программного материала, но при этом он владеет основными разделами учебной программы, необходимыми для дальнейшего обучения и может применять полученные знания по образцу в стандартной ситуации;

- оценка «удовлетворительно (3)» выставляется студенту, показавшему фрагментарный, разрозненный характер знаний, недостаточно правильные формулировки базовых понятий, нарушения логической последовательности в изложении программного материала, но при этом он владеет фрагментарно основными разделами учебной программы, необходимыми для дальнейшего обучения и может применять полученные знания по образцу в стандартной ситуации;
- оценка «неудовлетворительно (2)» выставляется студенту, который не знает большей части основного содержания учебной программы дисциплины, допускает грубые ошибки в формулировках основных понятий дисциплины и не умеет использовать полученные знания при решении типовых практических задач;
- оценка «неудовлетворительно (1)» выставляется студенту, который не знает формулировок основных понятий дисциплины.

## **5. Методические материалы, определяющие процедуры оценивания знаний, умений, навыков и (или) опыта деятельности**

Во время проведения дифференцированного зачета обучающиеся могут пользоваться программой дисциплины.

## Материалы к спецкурсу "Диофантовы приближения"

Н.Г.Мощевитин, осенний семестр 2009/2010 уч.года

Критериев оценки "хорошо" и "удовлетворительно" в настоящее время не имеется.

Для получения оценки "отлично" достаточным критерием является хотя бы одно из четырех сформулированных ниже условий.

I. Уметь доказывать (вместе со всеми деталями) рассказанные теоремы и ориентироваться в них.

II. Решить  $\geq 80\%$  задач из списка, помеченных буквой а.

III. Решить  $\geq 40\%$  задач из списка, помеченных буквой b.

IV. Решить хотя бы одну задачу из списка, помеченную буквой с.

### ПРОГРАММА

1. Дерево Фарей. Теорема Гурвица о том, что для иррационального  $\alpha$  имеется бесконечно много рациональных дробей  $p/q$  таких, что  $|\alpha - p/q| < 1/(\sqrt{5}q^2)$ .

#### Задачи.

1(a). В теореме Гурвица доказывается, что если  $\alpha$  принадлежит интервалу Фарей  $(p/q, p_1/q_1)$ , то либо  $p/q$ , либо  $p_1/q_1$ , либо  $p/q \oplus p_1/q_1 = (p + p_1)/(q + q_1)$  обладают нужным свойством. Верно ли следующее усиление теоремы Гурвица: для любого иррационального  $\alpha$  существует бесконечно много интервалов Фарей  $(p/q, p_1/q_1)$ , таких, что либо  $p/q$ , либо  $p_1/q_1$  обладают нужным свойством.

2(a). Доказать, что неравенство теоремы Гурвица выполнено для хотя бы одной из трех последовательных подходящих дробей к  $\alpha$ .

3(b). Пусть  $\alpha$  иррационально и  $\tau \geq 0$ . Доказать, что существует бесконечно много рациональных дробей  $p/q$ , таких что

$$-\frac{1}{q^2\sqrt{4\tau+1}} < \alpha - \frac{p}{q} < \frac{\tau}{q^2\sqrt{4\tau+1}}$$

2. Цепные дроби. Общие теоремы об аппроксимации. Теорема о существовании луча Холла.

#### Задачи.

1(a). Доказать теорему Лежандра о том, что если  $|\alpha - p/q| < 1/(2q^2)$ , то несократимая дробь  $p/q$  является подходящей дробью к  $\alpha$ .

2(a). Верно ли утверждение обратное к теореме Лежандра (зад. 1)?

3(a). Доказать равносильность двух определений эквивалентных чисел ( $\alpha \sim \beta$  если некоторые "хвосты" разложений в цепные дроби у  $\alpha$  и  $\beta$  совпадают; второе определение -  $\alpha$  переводится в  $\beta$  некоторым целочисленным дробно-линейным унимодулярным преобразованием).

4(a). Вычислить первые три элемента дискретной части спектра Лагранжа.

5(b). Доказать, что в интервале  $(1/\sqrt{12}, 1/3)$  нет элементов спектра Лагранжа.

6(a). Доказать оценку для начала луча Холла, лучшую, чем  $\lambda_* > 6$ .

7(b). Доказать оценку для начала луча Холла  $\lambda_* \geq \sqrt{21}$ .

8(a). Доказать, что  $F_4 \cdot F_4$  является отрезком. ( $F_k$  есть множество чисел из отрезка  $[0, 1]$  у которых неполные частные разложения в цепную дробь не превосходят  $k$ .)

9(a). Каково максимальное значение  $\tau$  при котором множество  $F_2$  будет  $\tau$ -множеством?

10(b). Пусть  $\tau(k)$  есть максимальное значение  $\tau$  при котором множество  $F_k$  является  $\tau$ -множеством. Вычислить предел  $\lim_{k \rightarrow +\infty} \tau(k)/k$ .

11(b). Доказать, что если  $A_1, \dots, A_k$  суть  $\tau_1, \dots, \tau_k$ -множества с одинаковым начальным отрезком  $I$  и выполнено

$$\sum_{j=1}^k \frac{\tau_j}{1 + \tau_j} \geq 1,$$

то

$$A_1 + \dots + A_k = I + \dots + I.$$

12(c). Верно ли, что в любой окрестности любого значения параметров  $(\tau_1, \dots, \tau_k) \in \mathbb{R}^k$ , удовлетворяющих равенству из предыдущей задачи, найдутся такие наборы  $(\tau_1^*, \dots, \tau_k^*)$  и соответствующие  $\tau_j^*$ -множества, для которых

$$A_1 + \dots + A_k \neq I + \dots + I.$$

13(c). Верно ли, что для всякого  $\lambda$  из спектра Лагранжа найдется такое  $\alpha$ , что неравенство

$$\left| \alpha - \frac{p}{q} \right| \leq \frac{1}{\lambda q^2}$$

имеет бесконечно много решений в рациональных числах  $p/q$ , в то время как неравенство

$$\left| \alpha - \frac{p}{q} \right| \leq \frac{1 - \varepsilon}{\lambda q^2}$$

имеет конечное число решений при каждом положительном  $\varepsilon$ ?

**3.** Теорема Минковского о выпуклом теле (три доказательства - Бlichфельдра, Морделла и Зигеля).

**Задачи.**

1(a). Пусть  $M$  - тело в  $\mathbb{R}^n$  объема  $> k$ . Доказать, что найдется вектор  $x \in \mathbb{R}^d$ , такой что  $M + x$  содержит как минимум  $k + 1$  целую точку.

2(a). Можно ли в предыдущей задаче для замкнутого  $M$  строгое неравенство заменить нестрогим?

3(a). доказать, что если в теореме Минковского о выпуклом теле потребовать, что объем тела  $> 2^n k$ , то в теле найдется  $k$  пар целых различных ненулевых точек.

4(a). Можно ли определить объем замкнутого октаэдра в трехмерном пространстве, у которого центр и все вершины являются целыми точками, и других целых точек в октаэдре нет.

5(c). Каков максимальный объем октаэдра в трехмерном пространстве с центром в начале координат, внутри которого нет других целых точек.

6(b). Пусть

$$\Lambda^* = \{y : y \cdot x \in \mathbb{Z} \forall x \in \Lambda\}$$

есть решетка двойственная к решетке  $\Lambda \subset \mathbb{R}^n$ . Пусть тело  $K$  содержит точку 0 и не содержит никаких других точек решетки  $\Lambda$ . Доказать равенство

$$\text{vol} K + (\text{vol} K)^{-1} \sum_{\gamma \in \Lambda^* \setminus \{0\}} \left| \int_K e^{-\pi i y \cdot x} dx \right|^2 = 2^n \det \Lambda.$$

**4.** Совместные приближения. Теорема Бlichфельдта-Спона.

**Задачи.**

1(a). Доказать аналог теоремы Спона для совместных приближений в евклидовой норме (константу можно оставить в виде интеграла и не вычислять).

2(b). Вычислить асимптотику для константы в предыдущей задаче.

3(b). Доказать, что при каждом значении размерности  $n$  существует величина  $\sigma_n^*$ , строго большая, чем соответствующая величина из теоремы Спона и такая, что для бесконечно многих  $q$  выполнено

$$\max_{1 \leq j \leq n} \|q \alpha_j\| < 1/((\sigma_n^* q)^{1/n}).$$

4(с). Доказать, что величину из задачи 3 можно взять так, чтобы  $\sigma_n^* \rightarrow +\infty, n \rightarrow \infty$ .

5. Совместные приближения. Наилучшие приближения и вырождение размерности. Гипотеза В.М.Шмидта о последовательных минимумах.

**Задачи.**

1(а). Пусть  $\dim_{\mathbb{Z}}(1, \alpha_1, \dots, \alpha_n) \geq 4$ . Доказать, что существует последовательность пар индексов  $\nu < k$  таких, что  $\nu$  может быть сколь угодно большим, и для векторов наилучших приближений  $\mathbf{z}_l$  выполнено следующее:

- тройки

$$\mathbf{z}_{\nu-1}, \mathbf{z}_{\nu}, \mathbf{z}_{\nu+1}; \quad \mathbf{z}_{k-1}, \mathbf{z}_k, \mathbf{z}_{k+1}$$

состоят из линейно независимых векторов каждая;

- имеется некоторое двумерное вполне рациональное подпространство  $\pi$  такое, что

$$\mathbf{z}_l \in \pi, \quad \nu \leq l \leq k; \quad \mathbf{z}_{\nu-1} \notin \pi, \quad \mathbf{z}_{k+1} \notin \pi;$$

- четыре вектора

$$\mathbf{z}_{\nu-1}, \mathbf{z}_{\nu}, \mathbf{z}_{\nu+1}, \mathbf{z}_{k+1}$$

линейно независимы.

2(а). Доказать существование таких чисел  $\alpha_j$ , что  $\dim_{\mathbb{Z}}(1, \alpha_1, \dots, \alpha_n) = n + 1 \geq 3$  и среди последовательных векторов наилучших приближений встречаются сколь угодно длинные цепочки, лежащие в двумерных подпространствах.

3(б). Пусть векторы  $\mathbf{z}_{\nu}, \mathbf{z}_{\nu+1}$  порождают двумерную решетку  $\Lambda_{\nu}$  и  $d_{\nu}$  - ее фундаментальный объем. Доказать, что  $d_{\nu} \rightarrow +\infty, \nu \rightarrow +\infty$ .

4(б). "Прорежим" последовательность решеток  $\Lambda_{\nu}$  из предыдущей задачи следующим образом: если  $\lambda_{\nu+1} = \Lambda_{\nu} u$ , то решетку  $\lambda_{\nu+1}$  вычеркиваем. Последовательность определителей прореженной последовательности решеток снова будем обозначать  $d_{\nu}$ . Доказать что  $d_{\nu}$  всегда растут экспоненциально.

5(с). При  $n = 2$  определить величину

$$\inf_{\alpha_1, \alpha_2} (\liminf_{t \rightarrow \infty} d_t^{1/t}),$$

где инфимум берется по всем  $\alpha_1, \alpha_2$ , линейно независимым вместе с 1 над  $\mathbb{Z}$  а  $d_{\nu}$  - из предыдущей задачи.

6(а). В задаче В.М.Шмидта о последовательных минимумах доказать, что если  $\xi_1, \dots, \xi_n$  линейно независимы вместе с 1 над  $\mathbb{Z}$ , то для неограниченной последовательности вещественных чисел  $N$  выполнено  $\mu_1(N) = \mu_2(N)$ .

6(б). В условиях предыдущей задачи доказать, что при каждом  $i$  для неограниченной последовательности вещественных чисел  $N$  выполнено  $\mu_i(N) = \mu_{i+1}(N)$ .

6.  $(\alpha, \beta)$ -игры. Общие теоремы о выигрышных множествах.

**Задачи.**

1(а). Описать все 2/3-выигрышные множества на прямой.

2(а). Доказать, что при любом  $\alpha \in (0, 1/2)$  множество

$$\{\xi \in [0, 1] : \inf_{x \in \mathbb{N}} \|\xi x\| > 0\}$$

является  $\alpha$ -выигрышным.

3(б). Пусть последовательность положительных чисел  $t_n$  такова, что

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists N_0 \quad \forall n \geq N_0 : \quad \frac{t_{n+1}}{t_n} \geq 1 + \frac{1}{n^{\varepsilon}}.$$

Доказать, что при каждом положительном  $\delta$  множество

$$\mathcal{A}_\delta = \{x \in \mathbb{R} : \exists c(x) > 0 \ \forall n \in \mathbb{N} \ ||t_n x|| > c(x)/n^\delta\}$$

будет  $\alpha$ -выигрышным с любым заданным наперед  $\alpha \in (0, 1/2)$ .

4(с). Пусть последовательность положительных чисел  $t_n$  такова, что

$$\exists N_0 \ \forall n \geq N_0 : \frac{t_{n+1}}{t_n} \geq 1 + \frac{1}{n^{1/2}}.$$

Верно ли, что при некоторых положительных  $\delta < 1$  и  $\alpha$  множество

$$\mathcal{A}_\delta = \{x \in \mathbb{R} : \exists c(x) > 0 \ \forall n \in \mathbb{N} \ ||t_n x|| > c(x)/n^\delta\}$$

будет  $\alpha$ -выигрышным?

5(с). Доказать, что в условиях задачи 4 выполнено  $\mathcal{A}_{1/2} \neq \emptyset$ .

**7. Неоднородные приближения.** Обобщение теоремы Хинчина-Ярника.

**Задачи.**

1(b). Для матрицы  $\Theta$  наряду с "однородной" функцией Ярника рассмотрим "неоднородную" функцию

$$\psi_{\Theta, \alpha}(t) = \min_{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^m : M(\mathbf{x}) \leq t} \max_{1 \leq j \leq n} ||L_j(\mathbf{x}) - \alpha_j||, \quad \alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_n) \in \mathbb{R}^n$$

и функцию

$$\Psi_{\Theta}^{[inhom]} = \sup_{\alpha \in [0,1]^n} \psi_{\Theta, \alpha}(t).$$

Обычная функция Ярника удовлетворяет равенству

$$\psi_{\Theta}(t) = \psi_{\Theta, \mathbf{0}}(t).$$

Также наряду с системой чисел  $\Theta$  будем рассматривать транспонированную систему  ${}^t\Theta$ .

Доказать следующее утверждение. Пусть функция  $\psi(t)$  такова, что при некотором положительном  $\eta$  функция  $t \mapsto \frac{1}{t^\eta \psi(t)}$  монотонно стремится к бесконечности при  $t \rightarrow +\infty$ . Обозначим через  $\rho(t)$  функцию обратную к функции  $t \mapsto \frac{1}{\psi(t)}$ .

Предположим, что при всех достаточно больших значениях  $t$  выполняется

$$\psi({}^t\Theta(t)) > \psi(t).$$

Тогда для всех достаточно больших значений  $t$  выполнено

$$\Psi_{\Theta}^{[inhom]} \leq C_\eta \rho(t).$$

2(b). Доказать следующее утверждение. Пусть при всех достаточно больших  $t$  выполнено

$$\psi({}^t\Theta(t)) \leq \psi(t)$$

Тогда найдется набор вещественных чисел  $(\alpha_1, \dots, \alpha_n)$  такой, что при всех достаточно больших  $t$  выполняется

$$\psi_{\Theta, \alpha}(t) \geq \frac{1}{24n^{3/2}\rho(8mt)}.$$

**8. Метрическая теория.** теорема Хинчина-Касселса.

**Задачи.**

1(a). Доказать, что лакунарная последовательность является сигма-последовательностью.

2(a). Привести пример последовательности, не являющейся сигма-последовательностью.

3(b). Верно ли, что из условия

$$\exists N_0 \forall n \geq N_0 : \frac{t_{n+1}}{t_n} \geq 1 + \frac{1}{\log \log n}$$

будет следовать, что последовательность  $t_n$  является сигма-последовательностью.

4(b). Доказать следующее утверждение. Пусть набор положительнозначных функций  $\psi_1(q), \dots, \psi_n(q)$  натурального аргумента  $q$  таков, что функция

$$\psi(q) = \prod_{j=1}^n \psi_j(q)$$

не возрастает, а ряд  $\sum_{q=1}^{+\infty} \psi(q)$  расходится, то для почти всех наборов  $(\theta_1, \dots, \theta_n) \in \mathbb{R}^n$  имеется бесконечно много натуральных чисел  $q$ , таких что

$$\|q\theta_j\| < \psi_j(q), \quad 1 \leq j \leq n.$$

5(a). Сформулировать и доказать метрическое утверждение в случае сходимости ряда  $\sum_{q=1}^{+\infty} \psi(q)$  в постановке, рассмотренной в задаче 4.

6(c). Сформулировать и доказать теорему расходимости в задаче Д.Клейнбока (хотя бы для двумерного аффинного подпространства в  $\mathbb{R}^3$ ).